EA – ECO1
Chapitres 1 et 2

Calculs de maximisation sous contrainte

Consommateur et producteur

Maximisation sous contrainte : protocole type //

- **Etape n° 1 : détermination algébrique de l'équilibre du consommateur**
- On considère un consommateur qui exprime une fonction d'utilité répondant aux conditions du modèle de l'utilité ordinale de Pareto. Cette fonction U est notée :

$$U(x,y) = X^{0,3}.\ y^{0,7}$$

- Remarque mathématique :
- Il s'agit d'une fonction à double variable dite de Cobb-Douglas homogène de degré 1 (la somme des deux exposants est égale à 1).

- Par ailleurs, on sait que ce consommateur subit une contrainte budgétaire. Son revenu (R) s'établit à 50 € et les prix respectifs des biens x et y sont de 2 € et 5 €.

Maximisation sous contrainte : protocole type //

- L'objectif est de déterminer algébriquement le panier de biens x et y qui permet à ce consommateur de maximiser son utilité sous contrainte de son revenu. Mathématiquement, cet objectif s'écrit :

$$\mathbf{Max_{x,y}\ U(x,y) = x^{0,3}.\ y^{0,7}}$$

$$\boldsymbol{s.c.}\ \mathbf{R = \boldsymbol{p_x}.x + \boldsymbol{p_y}.y}$$

- Il existe deux protocoles mathématiques pour atteindre ces objectif :

①Le multiplicateur de Lagrange ;

②La méthode par substitution.

Maximisation sous contrainte : protocole type //

- Choix de la méthode par substitution !!!

- La méthode par substitution consiste à exprimer une des variables de la fonction d’utilité en fonction de l’autre variable à partir de la fonction de la contrainte budgétaire.
- Le but est de transformer une fonction complexe à deux variables en une fonction à simple variable qu’il restera à étudier (notamment en identifiant son extremum local qui, dans les exercices de microéconomie, est toujours un maximum local !!).

Maximisation sous contrainte : protocole type //

$$\mathbf{Max_{x,y}\ U(x,y) = x^{0,3}.\ y^{0,7}}$$

$$\boldsymbol{s.c.}\ \mathbf{R = \mathit{p_x}.x + \mathit{p_y}.y}$$

- Il faut réécrire la contrainte pour qu'elle soit de la forme :

$$\mathbf{y = a.x + b\ \ (1)}$$

- L'équation de la droite de budget est connue :

$$\mathbf{y = -p_x/p_y\ .\ x + R/p_y\ (2)}$$

- On a donc :

$$a = -p_x/p_y = -2/5$$

$$b = R/p_y = 50/5 = 10$$

- Cependant, pour la rigueur de l'analyse, il est préférable de conserver l'équation (1) et remplacer a et b par leurs valeurs numériques une fois le résultat obtenu !

Maximisation sous contrainte : protocole type //

$$\mathbf{Max_{x,y}\ U(x,y) = x^{0,3}.\ y^{0,7}}$$
$$\textbf{\textit{s.c.}}\ \mathbf{y = ax + b}$$

- On remplace dans la fonction d'utilité U, l'expression de y relative à la contrainte :

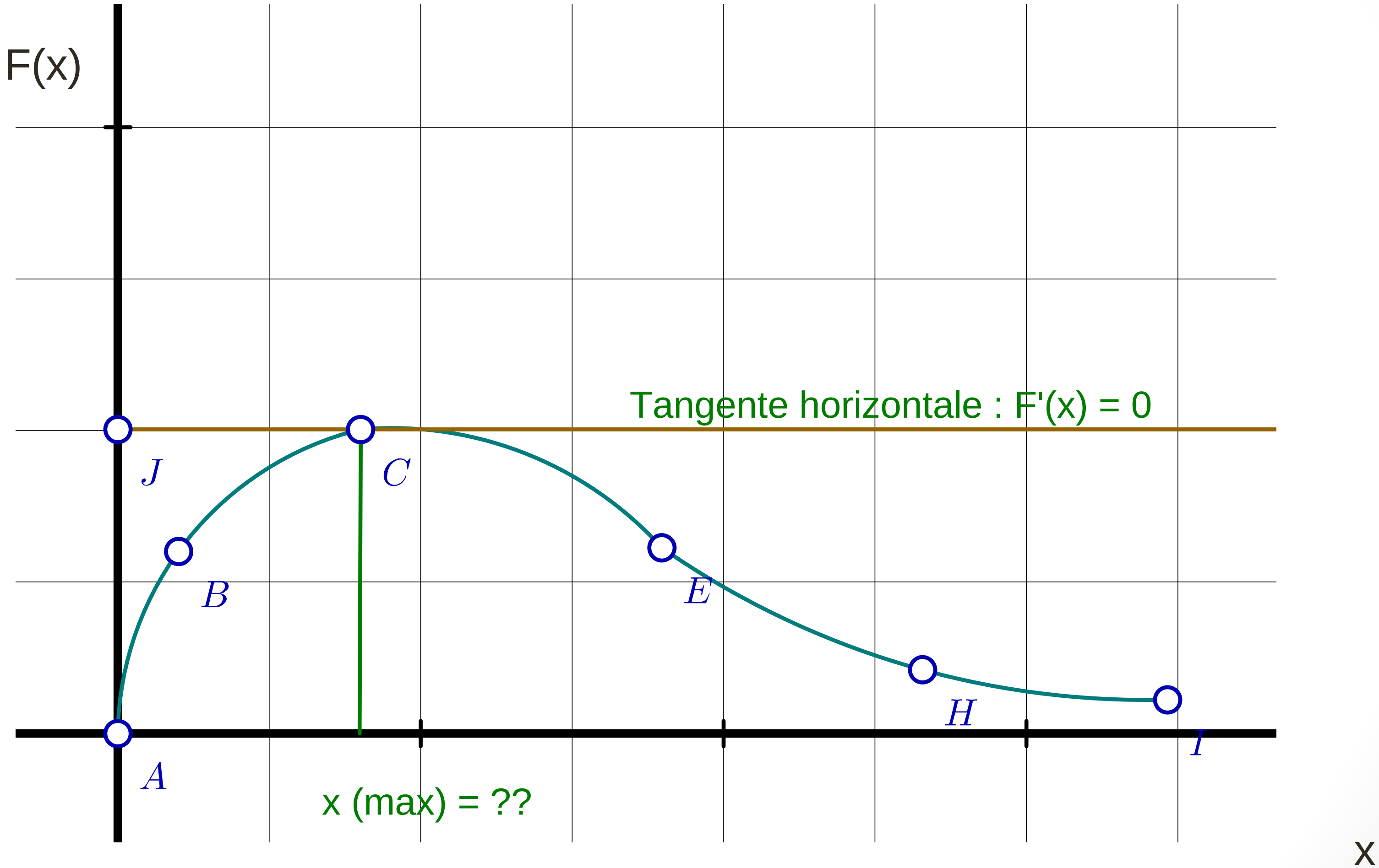
$$\mathbf{U(x,\ ax + b) = x^{0,3}.\ (ax + b)^{0,7}}$$

- On obtient ainsi une fonction à une seule variable que l'on note par exemple F(x) :

$$\mathbf{F(x) = x^{0,3}.\ (ax + b)^{0,7}}$$

- Objectif : identifier la valeur de x pour laquelle cette fonction admet un extremum local (on admettra que cet extremum local est un maximum). **Cette valeur de x correspondra à la quantité optimale de bien x à laquelle le consommateur peut prétendre compte tenu de ses préférences et de sa contrainte budgétaire ! On l'appelle conventionnellement x_m (« m » pour maximum).**
- Question : par quelle méthode mathématique peut-on identifier cette valeur de x ?

Maximisation sous contrainte : protocole type //



Maximisation sous contrainte : protocole type //

- La fonction $F(x_m)$ admet un *extremum* (qui est un maximum par admission) pour la valeur de x_m qui annule sa dérivée première.
- On calcule donc $\partial F(x_m)/\partial x_m = 0$

- Rappel : propriété des dérivées :

$$[u(x) . v(x)]' = u'(x) . v(x) + u(x) . v'(x)$$

- On a donc :

$$\mathbf{F(x_m) = x_m^{0,3} . (ax_m + b)^{0,7}}$$

- Et donc :

$$\partial(F(x)/\partial X = 0{,}3x_m^{(0,3 - 1)} . (ax_m + b)^{0,7} + x_m^{0,3} . 0{,}7(ax_m + b)^{(0,7 - 1)} . a$$

- Après simplification et pour $\partial(F(x_m)/\partial x_m = 0$ on obtient :

$$\mathbf{X_m = - 0{,}3 . b/a}$$

- Or : 0,3 = . La valeur générique de x_m s'écrit donc :

$$\mathbf{X_m = - \alpha . b/a}$$

Maximisation sous contrainte : protocole type //

- A partir de l'expression de x_m, il suffit de remplacer celle-ci dans l'équation de la droite de budget initiale :

$$y_m = - 2/5\ x_m + 10$$

$$\Leftrightarrow y_m = -2/5 \ .\ (-0,3b/a) + 10$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y_m = 0,6b/5a + 10}$$

- On peut maintenant calculer le point d'équilibre du consommateur à partir des valeurs algébriques de l'exercice. On sait que a = -2/5 (rapport des prix relatifs des deux biens) et que b = 50/5 = 10 (Revenu / prix du bien y). Il vient :

$$\mathbf{x_m = 7,5}$$

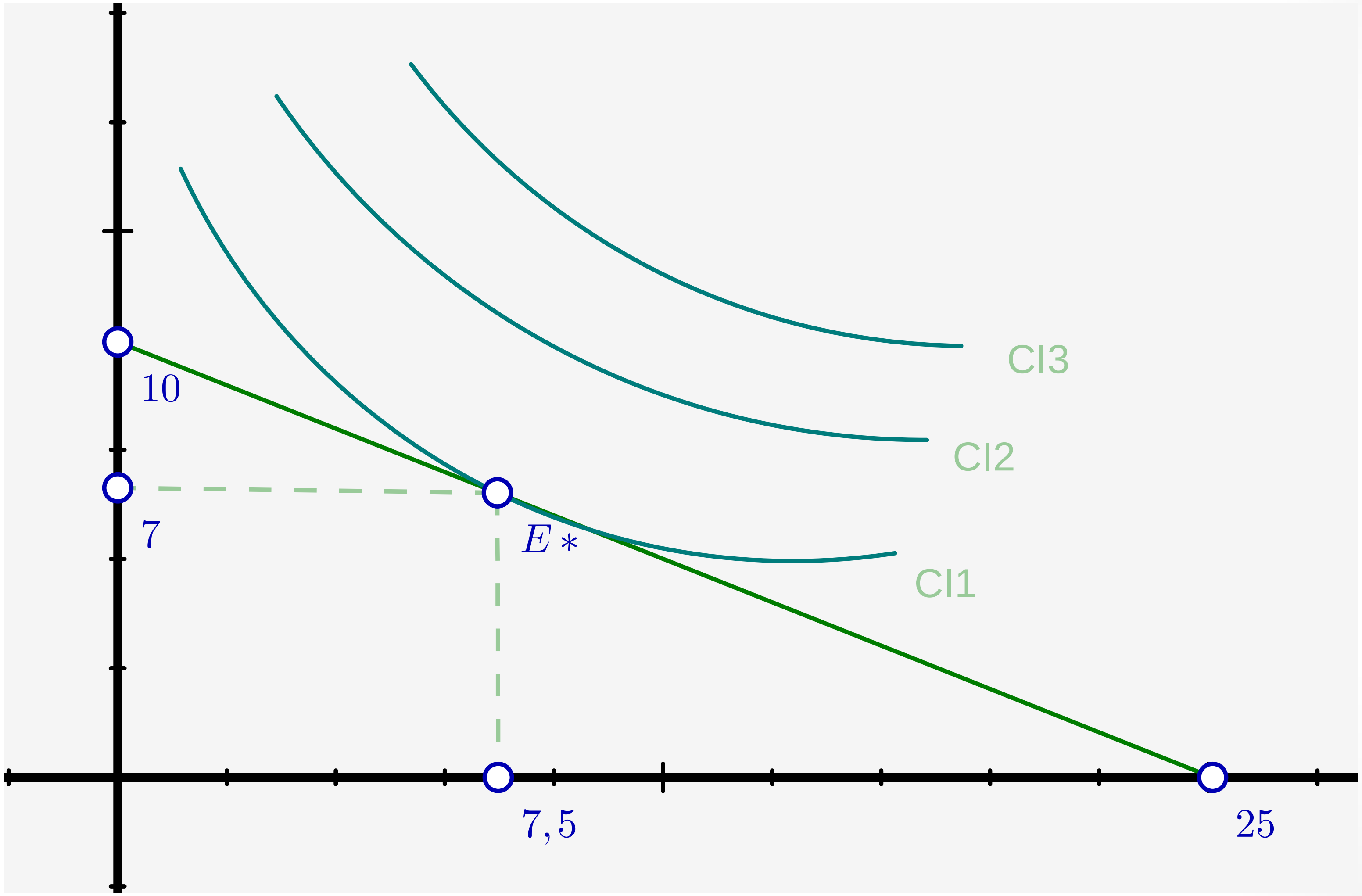
- Et :

$$\mathbf{y_m = 7}$$

On vérifie ainsi que :

$$\mathbf{U_m = U\ (x_m\ ;\ y_m) = U\ (7,5\ ;\ 7)}$$

Maximisation sous contrainte : protocole type //



Maximisation sous contrainte : protocole type //

- **Etape n° 2 : modification algébrique de l'équilibre du consommateur**

- On considère une modification du revenu de l'agent. Celui-ci s'établit dorénavant à 80 €.
- *Questions* :

1. Déterminer algébriquement l'impact sur l'équilibre du consommateur.
2. Représenter graphiquement le changement d'équilibre.
3. Commenter.

Maximisation sous contrainte : protocole type //

- **Question 1 :**
- L'équation de la droite de budget est affectée par le changement de revenu. Il vient :

$$y = -Px/Py.\ x + R/py$$

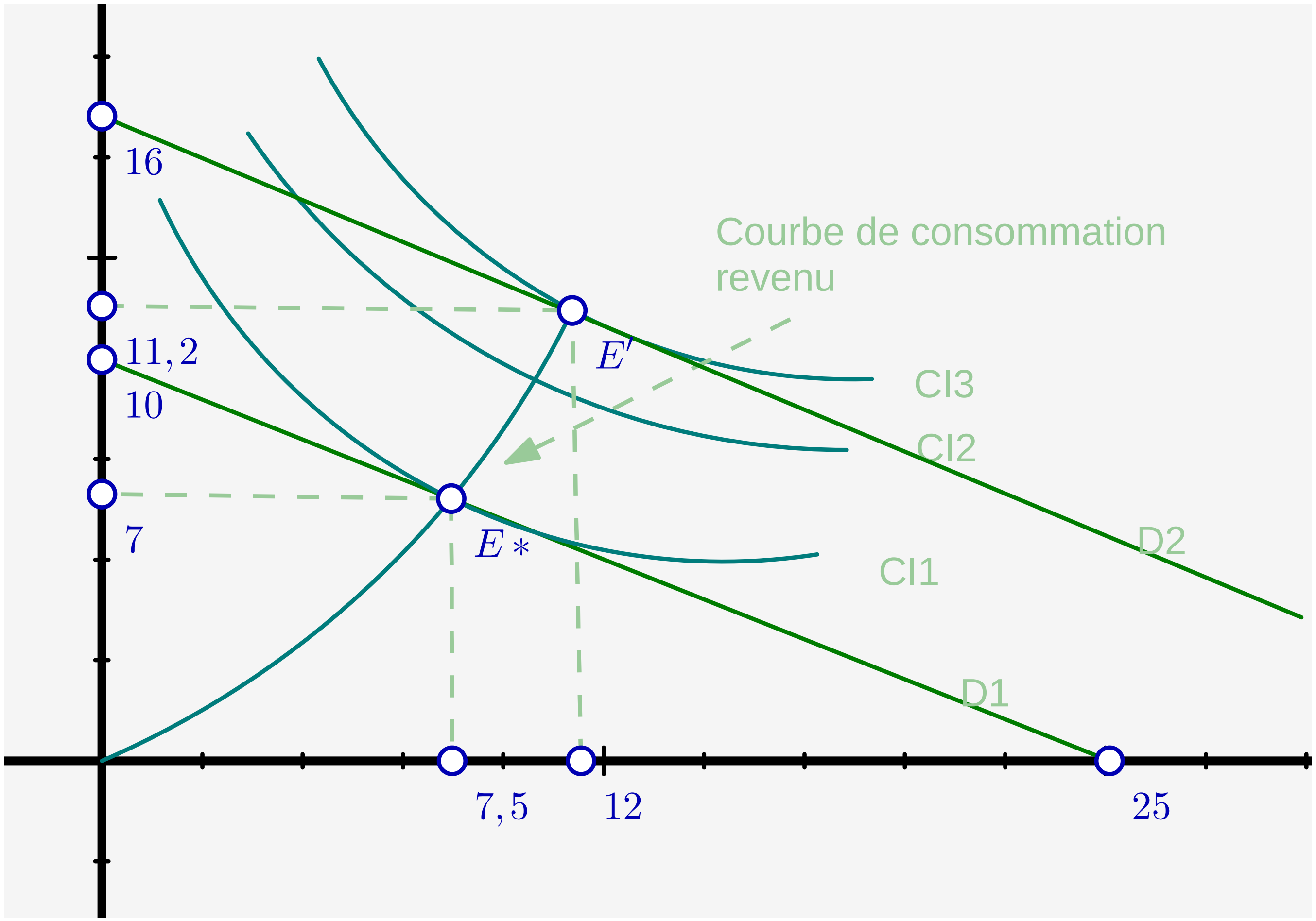
$$\Leftrightarrow\ Y = -2/5\ .\ X + 16$$

- Graphiquement, la droite de budget se déplace parallèlement à elle-même sur la droite.

- Pour calculer le nouveau point d'équilibre du consommateur, il suffit de remplacer les nouvelles valeurs de a et de b dans l'équation de x_m identifiée ci-dessus. Il vient :
- a = -2/5 et b = 16.
- En remplaçant, il vient :
- **X_m = - 0,3 . b/a**
- **X_m = 12**
- On remplace ensuite cette valeur de x_m dans la nouvelle droite de budget ci-dessous pour identifier y_m :
- **y_m = 11,2**

Maximisation sous contrainte : protocole type //

Question 2 :



Maximisation sous contrainte : protocole type //

- **Etape n° 3 : Détermination algébrique de la fonction d'Engel**

- Pour les fonctions homogènes de degré 1 du type :

$$f(x,y) = x^{\alpha} . Y^{\beta}$$

avec $\alpha < 1$ et $\beta < 1$ et $\alpha + \beta = 1$

- la fonction d'Engel se détermine à partir de la valeur de x_m établie ci-dessus :

$$\mathbf{X_m = - \alpha. b/a}$$

Or, sachant que $a = -p_x/p_y$ et que $b = R/p_y$, il vient :

$$X_m = (-\alpha . R/p_y) /(-p_x/p_y)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{X_m = \alpha/p_x . R}$$

Maximisation sous contrainte : protocole type //

- On considère à nouveau la fonction d'utilité du consommateur et sa contrainte budgétaire initiale.

$$\mathbf{U(x,y) = X^{0,3}.\ y^{0,7}}$$

- Par ailleurs, on sait que ce consommateur subit une contrainte budgétaire. Son revenu (R) s'établit à 50 € et les prix respectifs des biens x et y sont de 2 € et 5 €.
- On sait donc que :

$$y_m = -\ 2/5\ x_m + 10$$

- On suppose alors que le revenu du consommateur varie de période en période.
- **Questions** :

1. Exprimer algébriquement la fonction d'Engel de ce consommateur.
2. Représenter graphiquement la fonction d'Engel.
3. Commenter en utilisant le concept d'élasticité.

Maximisation sous contrainte : protocole type //

- **Question 1 :**
- La fonction d'Engel se détermine pour tous les x_m possibles comme suit :

$$X_m = (\alpha/p_x) \,.\, R$$

Avec les données de l'exercice, il vient :

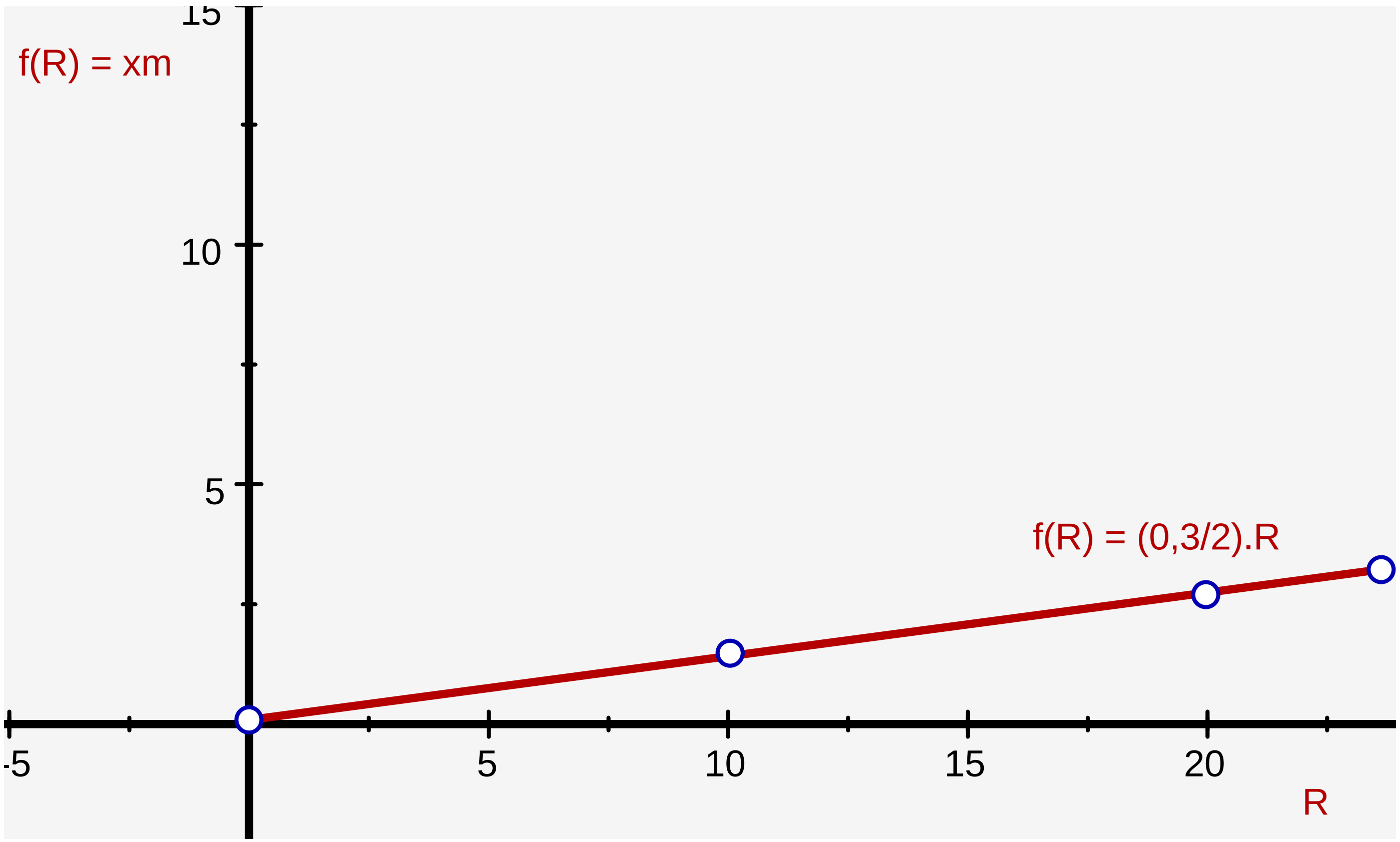
$$X_m = (0{,}3/2) \,.\, R$$

On vérifie bien que :

1. pour p_x constant, f(R) est égal à x_m et correspond à la fonction d'Engel (le bien x_m varie en fonction du revenu R) ;
2. f(R) est une fonction croissante ;
3. 0,3/2 est son coefficient directeur.

Maximisation sous contrainte : protocole type //

Question 2 (graphe de la fonction d'Engel) :



Maximisation sous contrainte : protocole type //

$$F(R) = X_m = (0,3/2) \,.\, R$$

$$e_{x/R} = (\partial X/\partial R) \,.\, (R/X) = (\partial X/\partial R) \,/\, (X/R)$$

$$e_{x/R} = (0,3/2) \,.\, (R/X)$$

- Exemple :
- **Quand R = 5 ⇒ x = 0,75**
- **$E_{0,75/5}$ = (0,3/2). (5/0,75) = 1**
- **On vérifie que lorsque R = 20 ⇒ x = 3**
- **$E_{3/20}$ = (0,3/2). (20/3) = 1 !**
- **Le bien x est un bien normal et puisque la fonction d'Engel est une fonction affine, l'élasticité est toujours égale à l'unité.**

Maximisation sous contrainte : exercice d'entrainement //

- On considère un consommateur qui exprime une fonction d'utilité répondant aux conditions du modèle de l'utilité ordinale de Pareto. Cette fonction U est notée :

$$\mathbf{U(x,y) = X^{0,5}.\ y^{0,5}}$$

- Etape 1 : on sait que ce consommateur subit une contrainte budgétaire. Son revenu (R) s'établit à 100 € et les prix respectifs des biens x et y sont de 2 € et 8 €.
- Etape 2 : Le revenu du consommateur s'accroît et s'établit dorénavant à 120 euros.
- Question : établir les deux équilibres du consommateur et commenter.