Economie Approfondie / 1ère année
Devoir Libre n°1
C. Rodrigues

Exercice n°1 :

On considère un consommateur qui exprime une fonction d'utilité U répondant aux conditions du modèle de l'utilité ordinale de Pareto. Cette fonction U est notée :

$$U(x\,;y) = x^{0,5} . y^{0,5}$$

On sait par ailleurs que ce consommateur subit une contrainte budgétaire. Son revenu s'établit à 100 euros et les prix respectifs des biens x et y donnés par le marché sont de 5 euros et 8 euros.

Questions :

1) Calculez, en utilisant la méthode de votre choix, l'équilibre du consommateur au sens de Pareto. Représentez graphiquement (et approximativement) cet équilibre du consommateur. Commentez.
2) On observe sur le marché une modification du revenu du consommateur. Celui-ci s'établir dorénavant à 120 euros. Calculez le nouvel équilibre du consommateur et modifiez votre graphique en conséquence. A partir de vos calculs, identifiez la fonction d'Engel associée à cette situation. Commentez en utilisant des calculs d'élasticité.
3) On observe sur le marché une modification du prix du bien x (alors que le revenu reste de 120 euros). Le prix de x s'établit dorénavant à 2 euros. Calculez le nouvel équilibre du consommateur, modifiez votre graphique en conséquence et commentez. A partir de vos calculs, identifiez la fonction de demande de ce consommateur associée à cette situation. Commentez en utilisant des calculs d'élasticité.

Eléments de correction

Question 1 :

$$\text{Max}_{x,y}\ U(x,y) = x^{0,5}.\, y^{0,5}$$
$$\text{s.c. } R = p_x.x + p_y.y$$

Il faut réécrire la contrainte pour qu'elle soit de la forme :
y = a.x + b (1)
L'équation de la droite de budget est connue :
y = -px/py . x + R/py (2)
On a donc :
a = -px/py = -5/8
b = R/py = 100/8 = 12,5
Cependant, pour la rigueur de l'analyse, il est préférable de conserver l'équation (1) et remplacer a et b par leurs valeurs numériques une fois le résultat obtenu !

On écrit donc :

$$\text{Max}_{x,y}\ U(x,y) = x^{0,5}.\, y^{0,5}$$
$$\textit{s.c. } y = ax + b$$

On remplace dans la fonction d'utilité U, l'expression de y relative à la contrainte :

$$U(x, ax + b) = x^{0,5}.\, (ax + b)^{0,5}$$

On obtient ainsi une fonction à une seule variable que l'on note par exemple F(x) :

$$F(x) = x^{0,5}.\, (ax + b)^{0,5}$$

Objectif : identifier la valeur de x pour laquelle cette fonction admet un extremum local (on admettra que cet extremum local est un maximum). **Cette valeur de x correspondra à la quantité optimale de bien x à laquelle le consommateur peut prétendre compte tenu de ses préférences et de sa contrainte budgétaire ! On l'appelle conventionnellement x_m (« m » pour maximum).**

La fonction $F(x_m)$ admet un *extremum* (qui est un maximum par admission) pour la valeur de x_m qui annule sa dérivée première.
On calcule donc $\partial F(x_m)/\partial x_m = 0$
Rappel : propriété des dérivées :
$[u(x) . v(x)]' = u'(x) . v(x) + u(x) . v'(x)$

On a donc :

$$\mathbf{F(x_m) = x_m^{0,5} . (ax_m + b)^{0,5}}$$

Après simplification et pour $\partial(F(x_m)/\partial x_m = 0$ on obtient :

$$\mathbf{X_m = - 0,5 . b/a}$$

A partir de l'expression de x_m, il suffit de remplacer celle-ci dans l'équation de la droite de budget initiale :

$$\mathbf{y_m = - 5/8\, x_m + 12,5}$$
$$\Leftrightarrow \quad y_m = -5/8 . (-0,5b/a) + 12,5$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{y_m = 5/16 . b/a + 12,5}$$

On peut maintenant calculer le point d'équilibre du consommateur à partir des valeurs algébriques de l'exercice. On sait que a = -5/8 (rapport des prix relatifs des deux biens) et que b = 100/8 = 12,5 (Revenu / prix du bien y). Il vient :

$$\mathbf{x_m = 10}$$

Et :

$$\mathbf{y_m = 6,25}$$

On vérifie ainsi que :

$$\mathbf{U_m = U\,(x_m, y_m)}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{U\,(10 ; 6,25)}$$

A l'équilibre, ce consommateur opte pour un panier de 10 unités de biens x et 6,25 unités de biens y. Avec ce panier, il maximise son niveau d'utilité : il atteint la courbe d'indifférence la plus élevée dans sa carte d'indifférence compte tenu des contraintes qu'il subit en matière de prix relatif des biens et de revenu nominal. En ce point, le modèle montre que le rapport des utilités marginales (Umx/Umy) est égal au rapport des prix des biens (px/py) soit 5/8.

Question 2 :

Le revenu du consommateur augmente de 20 euros (de 100 à 120 euros). Le prix relatif des deux biens reste inchangé et la fonction de budget s'établit dorénavant comme suit :

$$\mathbf{Max_{x,y}\ U(x,y) = x^{0,5} . y^{0,5}}$$
$$\mathbf{s.c.\ 120 = 5x + 8y}$$

Il faut réécrire la contrainte pour qu'elle soit de la forme :
y = a.x + b (1)
L'équation de la droite de budget est connue :
y = -px/py . x + R/py (2)
On a donc :
a = -px/py = -5/8
b = R/py = 120/8 = 15

En réutilisant la fonction $F(x_m)$ précédemment identifiée, il vient :

$$\mathbf{F(x_m) = x_m^{0,5}. (ax_m + b)^{0,5}}$$

Après simplification et pour $\partial(F(x_m)/\partial x_m = 0$ on obtient :

$$\mathbf{X_m = - 0,5 . b/a}$$

A partir de l'expression de x_m, il suffit de remplacer celle-ci dans l'équation de la droite de budget initiale :

$$\mathbf{y_m = - 5/8\ x_m + 15}$$
$$\Leftrightarrow\ y_m = -5/8 . (-0,5b/a) + 15$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{y_m = 5/16 . b/a + 15}$$

On peut maintenant calculer le nouveau point d'équilibre du consommateur à partir des valeurs algébriques de l'exercice. On sait que a = -5/8 (rapport des prix relatifs des deux biens) et que b = 120/8 = 15 (Revenu / prix du bien y). Il vient :

$$\mathbf{x_m = 12}$$

Et :

$$\mathbf{y_m = 7,5}$$

On vérifie ainsi que :

$$\mathbf{U_m = U\ (x_m, y_m)}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{U\ (12\ ;\ 7,5)}$$

La hausse du revenu du consommateur de 20 % (de 100 à 120 euros) se traduit par un déplacement de la droite de budget parallèlement à elle même vers le haut de la carte d'indifférence. L'équilibre du consommateur est modifié : il accroit sa consommation dans les deux biens.

La **fonction d'Engel du bien x** de ce consommateur traduit l'ensemble des x_m en fonction de tous les niveaux de revenu nominal. Il s'agit donc d'exprimer le revenu R en fonction de x_m :

$$\mathbf{X_m = - \alpha. b/a}$$

Or, sachant que $a = -p_x/p_y$ et que $b = R/p_y$, il vient :

$$\mathbf{X_m = (-\alpha . R/p_y) /(-p_x/p_y)}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{X_m = (\alpha/p_{x)} . R}$$

En appliquant les données numériques de l'exercice :

$$\mathbf{X_m = (0,5/5) . R}$$

L'élasticité point de la fonction d'Engel s'établit comme suit :

$$\mathbf{X_m = 0,1 . R}$$
$$\mathbf{e_{x/R} = (\partial X/\partial R) . (R/X) = (\partial X/\partial R) / (X/R)}$$
$$\mathbf{e_{x/R} = (0,5/5) . (R/X)}$$

Exemple :
Pour R = 10 → Xm = 1
$e_{1/10}$ = 0,1. (R/x) = 0,1 . 10 = 1
Pour R = 20 → Xm = 2
$e_{2/10}$ = 0,1. (R/x) = 0,1 . 10 = 1

Le bien x est un bien normal du point de vue de l'élasticité revenu.

Question 3 :

Le prix du bien x évolue sur le marché et passe de 5 euros à 2 euros tandis que de le revenu nominal reste de 120 euros. La fonction de budget s'établit dorénavant comme suit :

$$\mathbf{Max_{x,y}\ U(x,y) = x^{0,5}.\ y^{0,5}}$$
$$\mathbf{s.c.\ 120 = 2x + 8y}$$

Il faut réécrire la contrainte pour qu'elle soit de la forme :
y = a.x + b (1)
L'équation de la droite de budget est connue :
y = -px/py . x + R/py (2)
On a donc :
a = -px/py = -2/8
b = R/py = 120/8 = 15

En réutilisant la fonction $F(x_m)$ précédemment identifiée, il vient :

$$\mathbf{F(x_m) = x_m^{0,5}.\ (ax_m + b)^{0,5}}$$

Après simplification et pour $\partial(F(x_m)/\partial x_m = 0$ on obtient :

$$\mathbf{X_m = -\ 0,5\ .\ b/a}$$

A partir de l'expression de x_m, il suffit de remplacer celle-ci dans l'équation de la droite de budget initiale :

$$\mathbf{y_m = -\ 2/8\ x_m + 15}$$
$$\Leftrightarrow\ y_m = -2/8\ .\ (-0,5b/a) + 15$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{y_m = 2/16\ .\ b/a + 15}$$

On peut maintenant calculer le nouveau point d'équilibre du consommateur à partir des valeurs algébriques de l'exercice. On sait que a = -2/8 (rapport des prix relatifs des deux biens) et que b = 120/8 = 15 (Revenu / prix du bien y). Il vient :

$$\mathbf{x_m = -\ 0,5\ .\ 15\ /\ (-2/8)}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{x_m = 30}$$

Et :

$$\mathbf{y_m = 7,5}$$

On vérifie ainsi que :

$$\mathbf{U_m = U\ (x_m, y_m)}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{U\ (30\ ;\ 7,5)}$$

Avec la baisse du prix du bien x de 5 à 2 euros, le consommateur accroit sa consommation de x de 18 unités de biens x (il passe de 12 à 30 unités de biens consommés).
Plusieurs enseignements économiques peuvent être dégagés suite à cette évolution :

1) le bien x se comporte comme un bien normal du point de vue de l'élasticité prix (elle est négative et inférieure à -1).
   En appliquant la **méthode de l'élasticité-arc** dans l'intervalle on obtient :
   $$\mathbf{e_{x/P} = (\partial x/x)\ /\ (\partial Px/Px)}$$
   $$\mathbf{e_{x/P} = 1,5\ /\ -0,6}$$
   $$\mathbf{e_{x/P} = -2,5}$$
2) le bien y n'est pas du tout affecté par la variation du prix du bien x : 7,5 unités de biens y consommées avant la baisse du prix, 7,5 unités consommées après la baisse du prix. L'élasticité croisée du bien y est nulle : les deux biens sont indépendants.

La **fonction de demande du bien x** de ce consommateur traduit l'ensemble des x_m en fonction de tous les niveaux de prix de x. Il s'agit donc d'exprimer px en fonction de x_m :

$$\mathbf{X_m = -\ \alpha.\ b/a}$$

Or, sachant que $a = -p_x/p_y$ et que $b = R/p_y$, il vient :

$$\mathbf{X_m = (-\alpha\ .\ R/p_y)\ /(-p_x/p_y)}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{X_m = (\alpha/p_x)\ .\ R}$$

En appliquant les données numériques de l'exercice :

$$X_m = (0,5/p_x) . 120$$

On vérifie bien que la fonction de demande est décroissante en fonction du prix : lorsque le prix du bien décroit, les quantités demandées par le consommateur augmentent (ce qui est conforme au fait que l'élasticité prix soit négative).

Exercice n°2 :

Le tableau suivant indique le nombre d'unité de «viande ordinaire» qu'une famille achète selon divers niveaux de budget.

Budget (en euros)	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800
Unités demandées	1	2	3	3,5	3,8	3,9	3,5	2,5

Questions :
1) Définissez l'élasticité du revenu. Dans le cas de cet exercice, peut-on calculer des élasticités-arc ou des élasticités-point ? Justifiez.
2) Construisez (approximativement) la courbe d'Engel correspondant à ces données.
3) Calculez les élasticités du revenu de cette famille pour les unités de viande ordinaire qu'elle demande selon les différents budgets.
4) Commentez.

Eléments de correction

Question 1 :

L'élasticité-revenu mesure le degré de sensibilité de la demande d'un bien par rapport aux variations du revenu. Elle est égale au rapport entre la variation relative des quantités demandées (X) et la variation relative du revenu (R).
Mathématiquement on la note :

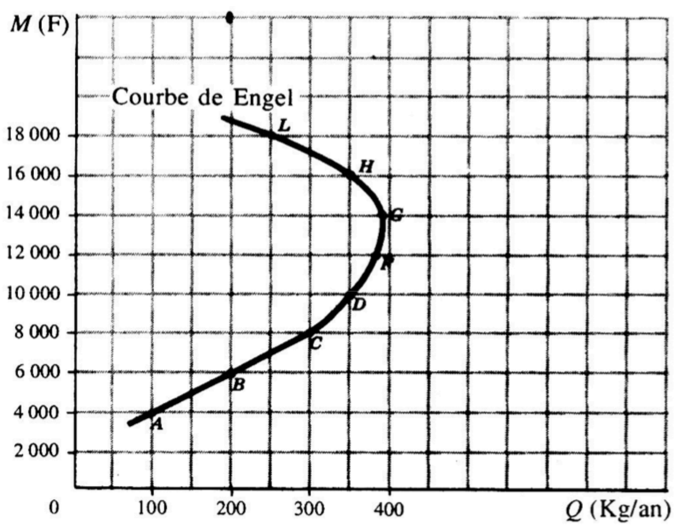
$$e_{x/R} = (\Delta x/x) \ / \ (\Delta R/R)$$

On peut aussi l'exprimer comme suit :

$$e_{x/R} = (\Delta x/\Delta R) . (R/x) = (\Delta x/\Delta R) \ / \ (x/R)$$

Dans ce cas de figure, il s'agit du calcul d'une série d'élasticité-arc.

Question 2 :



Attention : les unités diffèrent sur ce graphe par rapport aux données de l'exercice du sujet.
1 = 100 (en abscisses) et 400 = 4000 en ordonnées

Question 3 :

Entre A et B : ex/R = (Δx/x) / (ΔR/R) = 100 / 50 = 2
Dans cette zone, la « viande ordinaire » se comporte comme un bien de luxe.

Entre B et C : ex/R = (Δx/x) / (ΔR/R) = 50/ 33,3 ≃ 1,5
Dans cette zone, la « viande ordinaire » se comporte comme un bien de luxe.

Entre C et D : ex/R = (Δx/x) / (ΔR/R) = 16,67 / 25 ≃ 0,67
Dans cette zone, la « viande ordinaire » se comporte comme un bien normal nécessaire.

Entre D et E : ex/R = (Δx/x) / (ΔR/R) = 8,57 / 20 ≃ 0,43
Dans cette zone, la « viande ordinaire » se comporte comme un bien normal nécessaire.

Entre E et F : ex/R = (Δx/x) / (ΔR/R) = 2,63 / 16,67 ≃ 0,16
Dans cette zone, la « viande ordinaire » se comporte comme un bien normal nécessaire.

Entre F et G : ex/R = (Δx/x) / (ΔR/R) = -10,26 / 14,28 ≃ - 0,72
Dans cette zone, la « viande ordinaire » se comporte comme un bien inférieur.

Entre G et H : ex/R = (Δx/x) / (ΔR/R) = - 28,57 / 12,5 ≃ - 2,29
Dans cette zone, la « viande ordinaire » se comporte comme un bien inférieur.

Question 4 :

Lorsque la fonction d'Engel n'est pas une fonction affine, la valeur de l'élasticité change en tout point de la courbe. Dans le cas de cet exemple, le comportement des consommateur change pour un même produit en fonction de leur niveau de revenu.

Exercice n°3 :

On considère le comportement d'un consommateur qui exprime une demande de cigarettes. Sa fonction de demande par rapport au prix du paquet de cigarettes s'établit comme suit :

X = -4P + 70

Avec : P = prix du marché du paquet de cigarettes et X = nombre de paquets demandés par le consommateur.

Questions :
1) Commentez la fonction de demande de ce consommateur.
2) On constate que le prix du paquet sur le marché est de 5 euros. A combien de paquets la demande de ce consommateur s'établit-elle ?
3) Pour le prix de 5 euros, calculez l'élasticité-prix de la demande de cigarettes. Commentez.
4) Le gouvernement souhaite inciter les individus fumeurs à réduire leur consommation de cigarettes. Le gouvernement contribue donc à une hausse du prix du paquet qui passe à 7,5 euros. En supposant que le comportement de ce consommateur est représentatif de l'ensemble des autres, mesurez l'impact sur la demande de cigarettes. Commentez.
5) En supposant que le gouvernement prélève 50 % de taxes sur chaque paquet de cigarettes vendu, la hausse du prix de vente de 5 euros à 7,5 euros permet-elle d'accroitre les recettes fiscales ? Justifiez.
6) Calculez l'élasticité-prix lorsque le prix s'établit à 7,5 euros. Commentez.

Eléments de correction

Question 1 :
Il s'agit d'une fonction de demande typique au sens de Marshall selon laquelle l'effet-prix est négatif (celui-ci découle de la combinaison de l'effet de revenu et de l'effet de substitution).

Question 2 :
Pour P = 5 → Qd = 50

Question 3 :
L'élasticité-prix peut être calculée en un point (on dispose d'une fonction de demande). On sait que :

$$E_{x/P} = (\partial X/\partial P) \,.\, (P/X)$$
$$\Leftrightarrow \quad E_{x/P} = -4 \,.\, (P/X)$$

Pour P= 5 et Qd = 50 on obtient :

$$E_{x/P} = -4 \,.\, (5/50) = -0{,}4$$

L'élasticité est négative : les cigarettes se comportent comme un bien typique pour ce consommateur.

Question 4 :
Pour P = 7,5 → Qd = 40
Lorsque le prix du paquet augmente de 50 %, la demande baisse de 20 %.

Question 5 :
Si le gouvernement prélève 50 % de taxes sur chaque paquet vendu, lorsque le prix est de 5 euros, les **taxes s'élèvent à 125 euros** (2,5 euros de taxes par paquet vendu x 50 paquets vendus). Pour un prix de **7,5 euros, les recettes fiscales s'élèvent à 150 euros**.
Avec la hausse du prix, les recettes fiscales augmentent en raison du fait que la baisse des quantités demandées est compensée par la hausse du prix de vente.

Question 6 :

$$E_{x/P} = (\partial X/\partial P) \,.\, (P/X)$$
$$E_{x/P} = -4 \,.\, (P/X)$$

- Pour P= 7,5 et Qd = 40 on obtient :
- $E_{x/P} = -4 \,.\, (7{,}5/40) = -0{,}75$

L'élasticité est toujours négative mais plus forte en valeurs absolues : le consommateur est plus sensible à la variation du prix.

Exercice n°4 :

On considère les fonctions de demande exprimées par un consommateur pour deux biens X et Y :

$$X = -10p_x + 8p_y - 30p + 0{,}2R$$
$$Y = 40p_x + 3p_y - 10p - 0{,}1R$$

Avec :
X et Y les quantités demandées respectivement de X et de Y
Px : prix du bien X établi sur le marché à 10 euros
Py : prix du bien Y établi sur le marché à 8 euros
P : prix moyen des autres biens demandés par le consommateur établis à 2 euros
R : revenu du consommateur établi conventionnellement à 1000 euros.

Questions :

1. Calculer les élasticités-revenu des biens x et y. Commenter.

2. Calculer les élasticités-prix des biens x et y. Commenter
3. Calculer les élasticités croisées des biens x et y. Commenter.

Eléments de correction

Connaissant la contrainte budgétaire de ce consommateur, il est possible de calculer la quantité de bien X et de bien Y demandée par celui-ci.

X = -10 x 10 + 8 x 8 – 30 x 2 + 0,2 x 1000 = 104
Y = 40 x 10 + 3 x 8 – 10 x 2 – 0,1 x 1000 = 304

Question 1 :
Pour calculer l'élasticité revenu, il faut exprimer la fonction d'Engel de ce consommateur, c'est à dire la demande X en fonction de R d'une part et la demande de Y en fonction de R d'autre part.

Fonction d'Engel du bien X :

$$X = -10x10 + 8x8 - 30x2 + 0{,}2.R$$
$$\Leftrightarrow \quad X = 0{,}2.R - 96$$

Remarque : pour des raisons de pertinence économique, on suppose que cette fonction est seulement définie sur R+.

$$e_{x/R} = \partial x/\partial R\ .\ R/x$$

$e_{x/R} = 0{,}2\ .\ R/x$
$e_{x/R} = 0{,}2\ .\ 1000/104$
$e_{x/R} = 1{,}92$

L'élasticité revenu du bien X est positive et supérieure à 1 : le bien X est un bien normal de luxe.

Fonction d'Engel du bien Y :

$$Y = 40 \text{ x } 10 + 3 \text{ x } 8 - 10 \text{ x } 2 - 0{,}1.R$$
$$\Leftrightarrow \quad Y = -0{,}1.R + 404$$

Remarque : pour des raisons de pertinence économique, on suppose que cette fonction est seulement définie sur R+.

$$e_{y/R} = \partial y/\partial R\ .\ R/y$$

$e_{y/R} = -0{,}1\ .\ R/y$
$e_{y/R} = -0{,}1\ .\ 1000/304$
$e_{y/R} = -\ 0{,}33$

L'élasticité-revenu du bien Y est négative et comprise entre 0 et -1. Le bien Y se comporte comme un bien inférieur.

Question 2 :
Pour calculer l'élasticité-prix, il faut exprimer la fonction de demande de ce consommateur, c'est à dire la demande X en fonction de px d'une part et la demande de Y en fonction de py d'autre part.

Fonction de demande du bien X :

$$X = -10px + 8x8 - 30x2 + 0{,}2.1000$$
$$\Leftrightarrow \quad X = -10px + 204$$

Remarque : pour des raisons de pertinence économique, on suppose que cette fonction est seulement définie sur R+.

$$e_{x/px} = \partial x/\partial px \,.\, px/X$$

$e_{x/px} = -10 \,.\, 10/104$
$e_{x/px} = -0{,}96$

L'élasticité-prix du bien X est négative et comprise entre 0 et -1. Le bien X se comporte comme un bien normal pour ce consommateur.

Fonction de demande du bien Y :

$$Y = 40 \text{ x } 10 + 3py - 10 \text{ x } 2 - 0{,}1.1000$$
$$\Leftrightarrow \quad Y = 3py + 280$$

Remarque : pour des raisons de pertinence économique, on suppose que cette fonction est seulement définie sur R+.

$$E_{y/py} = \partial y/\partial py \,.\, py/Y$$

$e_{y/py} = 3 \,.\, 8/304$
$e_{y/py} = 0{,}08$

L'élasticité-prix du bien X est positive et proche de 0+. Le bien X se comporte comme un bien atypique pour ce consommateur. Etant donné que l'élasticité-revenu du bien Y est négative (voir ci-dessus), **il s'agit d'un bien Giffen pour ce consommateur**.

Question 3 :

L'élasticité croisée mesure la variation de la demande d'un bien X suite aux variations du prix d'un autre bien. Deux cas de figure ici : l'élasticité croisée de X suite à la variation de py ; l'élasticité croisée de Y suite à la variation de px.

$e_{cx/py} = \partial X/\partial py \,.\, py/X$

Il faut donc exprimer X en fonction de py :

$$X = -10 \text{ x } 10 + 8p_y - 30 \text{ x } 2 + 0{,}2 \text{ x } 1000$$
$$X = 8py + 40$$

$e_{cx/py} = \partial X/\partial py \,.\, py/X$
$e_{cx/py} = 8 \,.\, 8/104 = 0{,}62$

L'élasticité croisée est positive et inférieure à 1. Les biens X et Y sont des substituts standards.

$e_{cy/px} = \partial Y/\partial px \,.\, px/Y$

Il faut donc exprimer Y en fonction de px :

$$Y = 40p_x + 3p_y - 10p - 0{,}1R$$
$$Y = 40px + 3 \text{ x } 8 - 10 \text{ x } 2 - 0{,}1 \text{ x } 1000$$
$$Y = 40px - 96$$

$e_{cy/px} = \partial Y/\partial px \,.\, px/Y$
$e_{cy/px} = 40 \,.\, 10/304 = 1{,}32$

L'élasticité croisée est positive et supérieure à 1 les biens Y et X sont des substituts étroits.

Bon travail et bon courage !